Písemka z MA2, varianta A **30. 4. 2015**

1. V rovině $2x+y-z=1$ nalezněte bod, pro nějž je součet čtverců vzdálenosti od bodů $A=(1,1,1)$ a $B=(2,3,4)$ minimální.

Řešení:
Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro rovinu $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}$, kde $g(x,y,z)=2x+y-z-1$ a funkci

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2$$

vyjadřující součet čtverců vzdálenosti bodu (x,y,z) od bodů $A=(1,1,1)$ a $B=(2,3,4)$. Pro extrém $a=(x,y,z)$ na M existuje $\lambda\in\mathbb{R}$, že

$$\Big(2(x-3),2(y-4),2(z-5)\Big)=f'_{|a}=\lambda g'_{|a}=\lambda\cdot(2,1,-1)$$

a

$$2x+y-z=1.$$

Dostaneme $\lambda=-\frac{4}{3}$ a $a=(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{17}{3})$ s funkční hodnotou $f(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{17}{3})=\frac{92}{3}$.

K nabytí minima funkce v tomto bodě bychom (kromě uzavřenosti M) potřebovali také její omezenost, kterou nemáme. Pomůžeme si proto odhadem. Pro $U\in\mathbb{R}^3$ máme z trojúhelníkové nerovnosti

$$f(U)=||U-A||^2+||U-B||^2\geq\Big(||U||-||A||\Big)^2+\Big(||U||-||B||\Big)^2\to+\infty$$

pro $||U||\to+\infty$. Existuje tedy $K>0$ takové, že pro každé $U\in\mathbb{R}^3$ splňující $||U||\geq K$ bude $f(U)\geq f(a)+1=\frac{92}{3}+1$.

Nyní máme, že

- na množině $M_1=M\cap\{U\in\mathbb{R}^3 \mid ||U||\geq K\}$ má funkce hodnotu vždy alespoň $f(a)+1$.

- na množině $M_2=M\cap\{U\in\mathbb{R}^3 \mid ||U||\leq K\}$, která je uzavřená i omezená nabývá svého minima. To nemůže být vazáno na okraj (kde je opět hodnota alespoň $f(a)+1$), tedy to může být pouze v nalezeném bodě $a=(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{17}{3})$, který nutně kvůli své funkční hodnotě $f(a)$ musí ležet v M_2.

Celkově tedy funkce f skutečně nabývá na M svého (jediného) minima v bodě $a=(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{17}{3})$.

2. Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=e^{2xy}-y^2$$

v bodě $a=(0,0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

$$f'_{|(0,0)}=\Big(2ye^{2xy},2xe^{2xy}-2y\Big)_{|(0,0)}=(0,0)$$

$$f''_{(0,0)}=\begin{pmatrix}4y^2e^{2xy} & 2e^{2xy}+4xye^{2xy}\\ 2e^{2xy}+4xye^{2xy} & 4x^2e^{2xy}-2\end{pmatrix}_{|(0,0)}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

Pro $\mathbf{h}=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\mathbf{h})=f(0,0)+f'_{|(0,0)}\mathbf{h}+\frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\mathbf{h},\mathbf{h})=1+\frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=1+2h_1h_2-h_2^2.$$

Bilineárni forma $g(h_1, h_2) = 2h_1h_2 - h_2^2$ druhé derivace je indefinitní (např. $g(1,1) = 1 > 0$ a $g(0,1) = -1 < 0$). V bodě $a = (0,0)$ je tedy sedlový bod funkce f.

Jiné řešení: Polynom lze také získat Taylorovým polynomem funkce jedné proměnné:

$$e^t = 1 + t + \varphi(t) \cdot |t|$$

kde $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0$.

$$f(h_1, h_2) = e^{2h_1h_2} - h_2^2 = 1 + 2h_1h_2 + \varphi(2h_1h_2) \cdot |2h_1h_2| - h_2^2 =$$

$$= 1 + 2h_1h_2 - h_2^2 + \Omega(\mathbf{h}),$$

kde $\Omega(\mathbf{h}) = \varphi(2h_1h_2) \cdot |2h_1h_2|$.

Výraz $T(h_1, h_2) = 1 + 2h_1h_2 - h_2^2$ je hledaným Taylorovým polynomem stupně nejvýše 2, protože $\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{\Omega(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||^2} = 0$:

$$\frac{|\Omega(\mathbf{h})|}{||\mathbf{h}||^2} \leq \left|\varphi(2h_1h_2)\right| \cdot \frac{|2h_1h_2|}{||\mathbf{h}||^2} \leq 4 \cdot \left|\varphi(2h_1h_2)\right| \to 0$$

pro $\mathbf{h} \to 0$, protože $|h_i| \leq ||\mathbf{h}||$ pro $i = 1, 2$.

3. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint_E x^2 \, dV,$$

kde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 \ \& \ 0 \leq y \ \& \ x \leq 0\}$.

Řešení:
Oblast E je čtvrtina kužele. K výpočtu integrálu použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \qquad \det \Phi' = r$$

s paramerizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako

$$U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq z \leq 2 \ \& \ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}.$$

$$\iiint_{E=\Phi(U)} x^2 \, dV = \iiint_U r^3 \cos^2\varphi \, dV = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 \int_0^z r^3 \cos^2\varphi \, dr \, dz d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 z^4 \cos^2\varphi \, dz d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \Big(\int_0^2 z^4 \, dz \Big) \cdot \Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \Big) = \frac{8}{5}\pi.$$